بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد فیزیک سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
–	۸	۲۱۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۱۰ مسئله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- نمره‌ی هر سوال در ابتدای آن نوشته شده است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- آماده‌سازی پاسخنامه‌ی این آزمون توسط **ایرانفو، مرجع المپیاد فیزیک ایران** انجام شده است.
- جمع‌آوری و آماده‌سازی دفترچه‌ی سوالات این آزمون توسط **کمیته‌ی علمی ماخ** انجام شده است.

ایرانفو
مرجع المپیاد فیزیک ایران

۱- میله‌ی رسانای AB به طول ℓ وجرم m و مقاومت الکتریکی R توسط میله‌های سبک و با مقاومت ناچیز AD و BC به طول b به میله‌ی ثابت و بـا مقاومت ناچیز DC وصل شـده است. دستگاه می‌تواند حـول میله‌ی DC بچرخد. میدان مغناطیسی یکنواخت $\overline{B}$ بـه طرف بالا و شتاب گرانش به طرف پایین است. در ابتدا مستطیل $ABCD$ افقی است و از این وضعیت رها می‌شود. لحظه‌ای را در نظر بگیرید که دستگاه به اندازه‌ی زاویه‌ی θ نسبت به حالت افقی چرخیده و سرعت زاویه‌ای آن $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ است. در این لحظه

الف) شدت جریان را در مدار حساب کنید.

ب) نیروی F وارد شده از طرف میدان مغناطیسی به میله‌ی AB را حساب کنید.

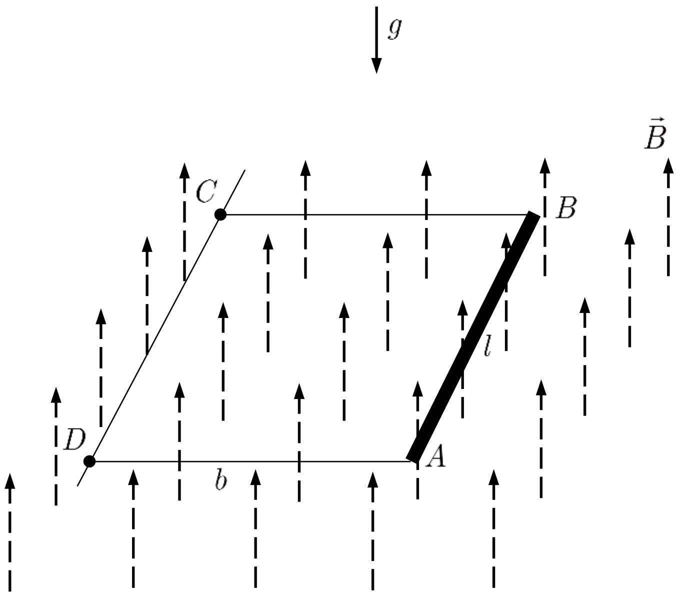
ج) آهنگ انجام کار توسط نیروی F، $\dfrac{dw}{dt}$ را حساب کنید.

د) آهنگ تولید گرما در مقاومت را حساب کنید.

هـ) آهنگ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی میله‌ی AB را حساب کنید.

و) آهنگ تغییرات انرژی جنبشی دستگاه را حساب کنید.

توجه: کلیه‌ی پاسخها را بر حسب داده‌های مسئله بنویسید.



۲- لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع مقطع r بر روی سطح افقی زمین ثابت است. گلوله‌ی کوچکی از سطح زمین پرتاب می‌شود و از روی لوله می‌گذرد. صفحه‌ی حرکت گلوله (صفحه‌ی xy) بـر محـور استوانه عمـود است. مسیر گلوله در نقاط A و A' که در شکل با زاویه‌ی θ مشخص شده‌اند بر لوله مماس است. مقاومت هوا و اتلاف انرژی گلوله در لحظه‌ی تماس با لوله ناچیز و شتاب گرانش در محل g است.

الف) سرعت گلوله در نقطه‌ی A را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

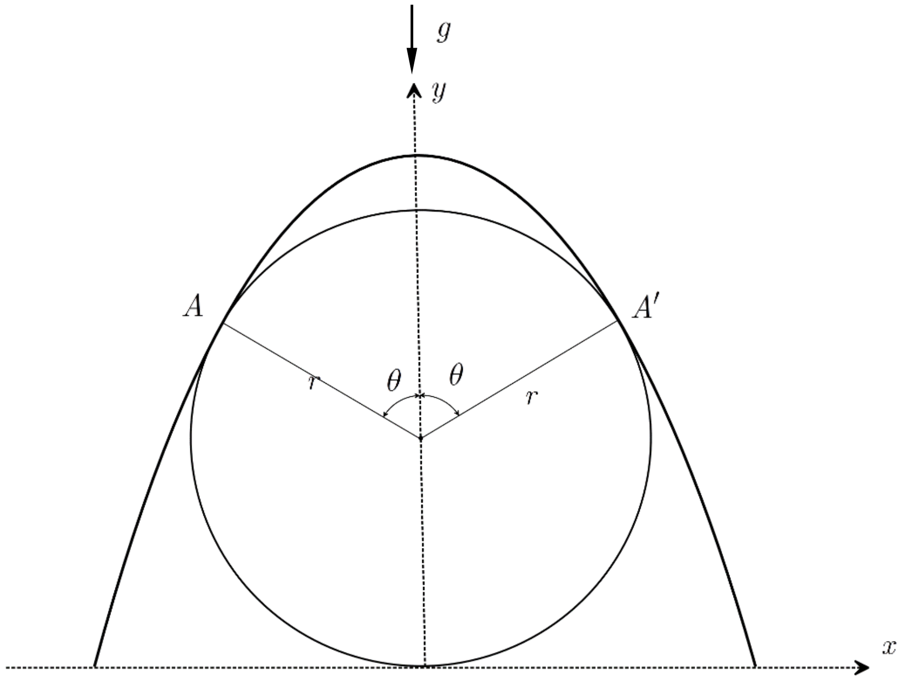
ب) سرعت پرتاب گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g به دست آورید.

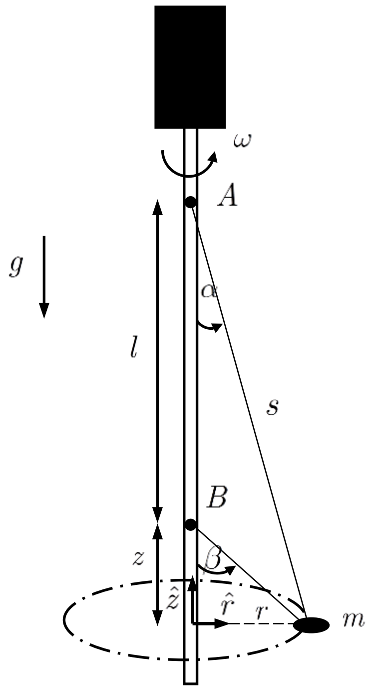
ج) ارتفاع نقطه‌ی اوج گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

د) سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا مسیر گلوله در بالاترین نقطه بر لوله مماس باشد؟ یعنی نقطه‌ی تماس نقطه‌ی $\theta=$۰ باشد.

هـ) کمترین مقدار سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا گلوله از روی استوانه رد شود؟ وضعیت‌هایی که گلوله در بخشی از مسیرش روی استوانه لیز می‌خورد را در نظر نگیرید.

و) مختصه‌ی x نقطه‌ی پرتاب را برای هر قسمت (ه-) به دست آورید.





۳- نخ سبکی به طول 2ℓ از داخل مهره‌ای به جرم m عبور کرده و به دو نقطه‌ی ثابت A و B از یک میله‌ی قائم، به فاصله‌ی ℓ از یکدیگر، بسته شده است. این مجموعه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم می‌چرخد، طوری که مهره در یک صفحه‌ی ثابت افقی حرکت می‌کند. از اصطکاک بین نخ و مهره صرف‌نظر کنید.

الف) قانون دوم نیوتن را در دو راستای r و z بنویسید. از متغیرهای کمکی α ، β و r که روی شکل مشخص شده‌اند استفاده کنید.

ب) $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را بر حسب r و s و ℓ ؛ و $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ را برحسب z و s و ℓ بنویسید. z فاصله‌ی نقطه‌ی B از صفحه‌ی حرکت مهره، و s فاصله‌ی نقطه‌ی A از مهره است.

ج) z، s ، $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و نیروی کشش در طول نخ را بر حسب m ، ℓ، ω و g به دست آورید.

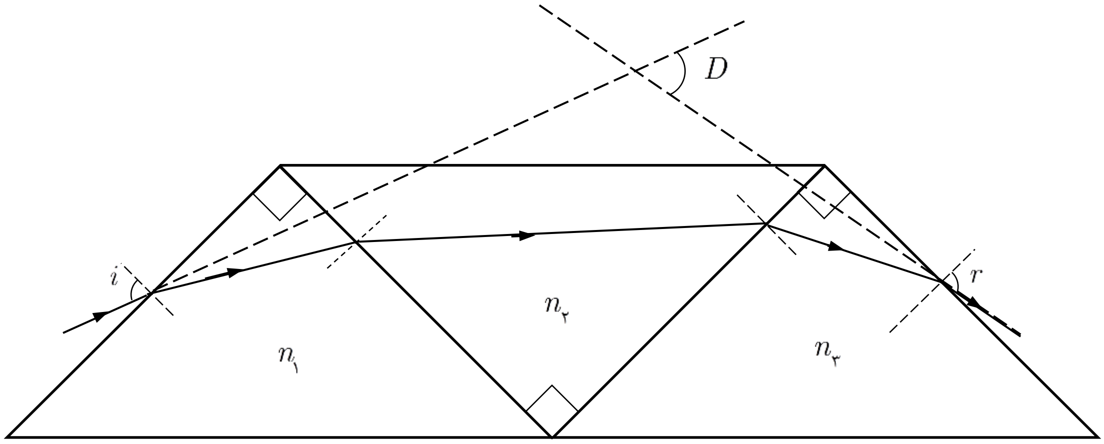
د) کمترین مقدار سرعت زاویه‌ای ω چقدر باشد که مهره بر روی دایره‌ای به شعاع $r \neq 0$ حول میله بچرخد؟

۴- سه منشور که قاعده‌ی هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی الساقین است مطابق شکل به هم چسبیده‌اند. ضریب شکست منشورها n_1, n_2, n_3 است. یک پرتوی نور از هوا به منشور که در سمت چپ است می‌تابد و از منشوری که در سمت راست است وارد هوا می‌شود. زاویه‌ی تابش پرتوی فرودی به منشور چپ را i و زاویه‌ی شکست پرتوی خروجی از منشور راست را r بنامید. فرض کنید مسیر پرتوها چنان است که در هیچ کدام از سطوح جدایی بازتاب کلی رخ نمی‌دهد.

الف) r را برحسب i، n_1, n_2, n_3 به دست آورید.

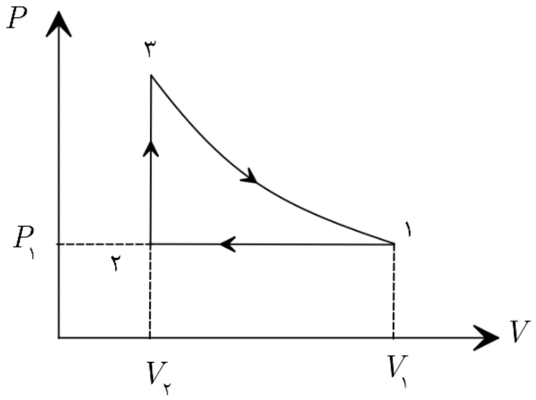
ب) زاویه‌ی انحراف (زاویه‌ی بین راستای پرتوی تابیده به منشور چپ و راستای پرتوی خروجی از منشور راست)، D، را بر حسب i ، n_1, n_2, n_3 به دست آورید.

ج) چه رابطه‌ای بین $n_۳, n_۲, n_۱$ وجود داشته باشد تا زاویه‌ی انحراف صفر شود؟



۵- معادله‌ی حالت یک گاز غیر ایده‌آل $P(V-nb)=nRT$ و انرژی داخلی آن $U=nC_{MV}$ است. P فشار، V حجم، n تعداد مول، T دمای مطلق، C_{MV} ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، R ثابت جهانی گازها و b ثابتی است که به جنس گاز بستگی دارد. C_{MV} را ثابت بگیرید.

چرخه‌ی کار یک ماشین گرمایی که با این گاز کار می‌کند به صورت زیر است. در این چرخه فرآیند ۱ $\rightarrow$ ۳ بی‌دررو است، که در آن کمیت $T(V-nb)^{R/C_{MV}}$ ثابت است. بازده این ماشین گرمایی را برحسب $n, R, C_{MV}, P_۱, V_۲, V_۱$ و b بنویسید.

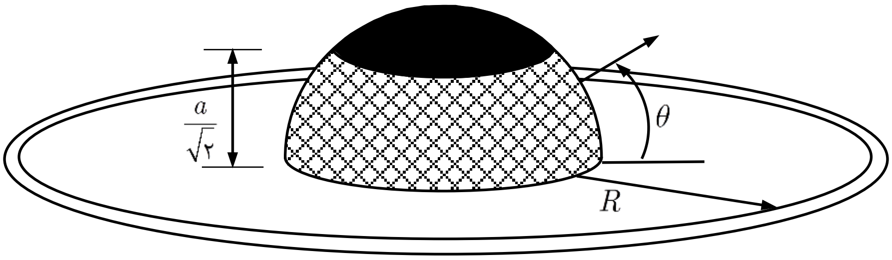


۶- فواره‌ای مطابق شکل از نیم کره‌ای به شعاع a تشکیل شده که بخشی از سطح آن به طور یکنواخت سوراخ شده و آب از این سوراخ‌ها با سرعت یکسان $V_۰$ خارج می‌شود. تعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیم‌کره $n_۰$ است. مقدار آبی که در واحد زمان از هر سوراخ خارج می‌شود را Q بگیرید.

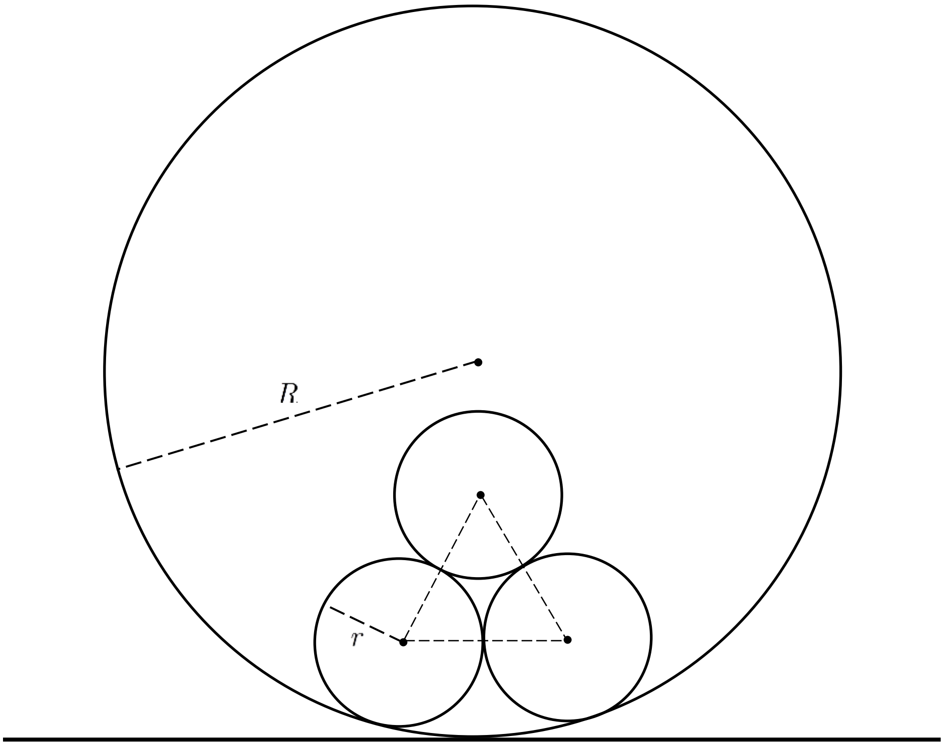
الف) قطره آبی که زاویه‌ی پرتابش از فواره θ است در چه فاصله‌ای از مرکز نیم کره، R، به زمین می‌رسد؟ برای سهولت فرض کنید a کوچک است، به طوری که قطره از مرکز نیم کره با سرعت $V_۰$ پرتاب می‌شود.

ب) قطره‌هایی که زاویه‌ی پرتابشان بین θ و $\theta+\Delta\theta$ است در فاصله‌ی بین R و $R+\Delta R$ از مرکز نیم‌کره به زمین می‌رسند. ΔR چقدر است؟ $\Delta\theta$ را خیلی کوچک بگیرید. از توان‌های دوم و بالاتر $\Delta\theta$ چشم‌پوشی کنید، و ΔR را به صورت ضریبی از $\Delta\theta$ به دست آورید.

ج) مقدار آبی که در واحد زمان به واحد سطح زمین در فاصلهی $R=\dfrac{\sqrt{۳}V_۰^۲}{۲g}$ از مرکز نیم‌کره می‌رسد، بر حسب $n_۰, Q, a, V_۰$ و g چقدر است؟



۷- سه لوله‌ی استوانه‌ای که طول، جرم، و جنس آنها یکسان و شعاع مقطع آنها r است؛ مطابق شکل درون لوله‌ی استوانه‌ای بزرگتری به شعاع R در حالت تعادل و ساکن‌اند و در این حالت هر سه لوله‌ی درونی بر هم مماس‌اند. لوله‌ی بزرگتر به سطح افقی زمین چسبیده است. اصطکاک بین لوله‌ها ناچیز است. اگر $\frac{R}{r}$ از حد معینی بزرگتر باشد لوله‌ای که بالاتر قرار گرفته جای خود را بین دو لوله باز می‌کند. نسبت $\frac{R}{r}$ حداکثر چقدر باشد تا لوله‌های درونی به هم مماس بمانند؟



۸- اگر سه رسانای مجزای ۱ و ۲ و ۳ را به پتانسیل‌های V_1, V_2, V_3 نسبت به زمین ببندیم؛ بار روی آنها به ترتیب Q_1, Q_2, Q_3 می‌شود، به طوری که

$$Q_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3$$
$$Q_2 = \alpha_2 V_1 + \beta_2 V_2 + \gamma_2 V_3$$
$$Q_3 = \alpha_3 V_1 + \beta_3 V_2 + \gamma_3 V_3$$

ضرایب ثابت $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3$ و γ_3 در رابطه فوق به شکل رساناها و موقعیت فضایی آنها نسبت به هم بستگی دارند.

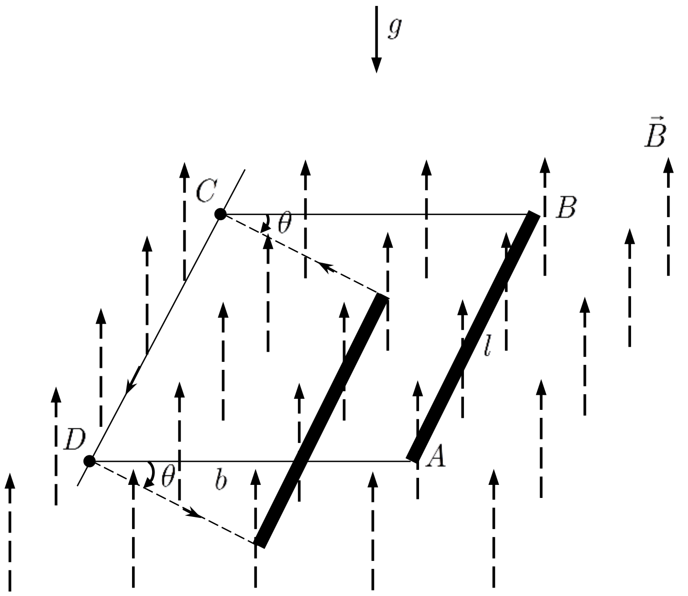
در حالی که رساناهای ۲ و ۳ به زمین متصلند رسانای۱ را به پتانسیل ۱۰ ولت وصل می‌کنیم. در این حالت بارها به ترتیب $Q_1 = 25\mu C$، $Q_2 = 10\mu C$ و $Q_3 = 15\mu C$ می‌شوند. اگر علاوه بر رسانای ۱، رسانای ۲ را هم به پتانسیل ۱۰ ولت وصل کنیم و رسانای ۳ همچنان به زمین وصل باشد، بارها چنین خواهد بود: $Q_1 = 35\mu C$، $Q_2 = 60\mu C$ و $Q_3 = 25\mu C$. حال اگر هر سه رسانا را به پتانسیل ۱۰ ولت

وصل کنیم بارها به صورت زیر خواهند بود: $Q_۱ = ۵۰\mu C$، $Q_۲ = ۷۰\mu C$ و $Q_۳ = ۵۰\mu C$.

در حالی که رساناها با حفظ آرایش فضایی‌شان بدون بارند و به هیچ جا اتصال ندارند یک باتری به ولتاژ V را بین رساناهای ۱ و ۲ می‌بندیم. رسانای ۳ در همان محل قبلی بدون بار و اتصال حضور دارد. ظرفیت خازنی که به این ترتیب بین رساناهای ۱ و ۲ تشکیل می‌شود چقدر است؟

«پاسخنامه‌ی تشریحی»

۱- ماخ اگر در لحظه t، زاویه صفحه‌ی $ABCD$ با صفحه‌ی افقی $\theta(t)$ باشد شار مغناطیسی گذرنده از حلقه $ABCD$ برابر است با:



الف)

$$\phi_B = \ell b \cos\theta(t) B$$

$$\varepsilon = IR \text{ و } \varepsilon = \left|\frac{-d\phi_B}{dt}\right| \frac{dw_F}{dt} = -Fb\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dw_F}{dt} = -\frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$ نیروی محرکه القایی

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \ell b B\frac{d\theta(t)}{dt}(-\sin\theta(\mathrm{t})) \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\omega b \ell^2 B^2 \sin\theta}{R}.$$

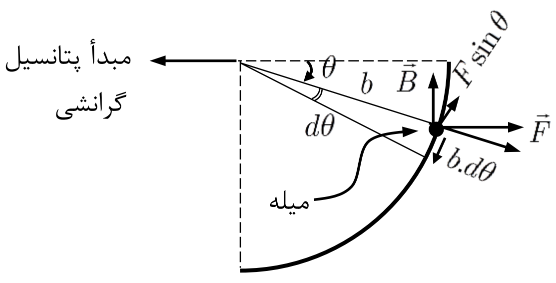
ب)

$$\vec{F} = \mathrm{I}\,\vec{\ell}\times\vec{B} \quad , \quad \vec{\ell}\perp\vec{B} \Rightarrow F = I\ell B \Rightarrow F = \frac{\omega b \ell^2 B^2 \sin\theta}{R}$$

ج) با توجه به شکل، هنگام جابجایی میله‌ی AB به اندازه $d\theta$، جابه‌جایی $bd\theta$ و نیروی در خلاف جهت آن $F\sin\theta$ است. بنابر این:

$$dw_F = -(F\sin\theta)bd\theta$$

در نتیجه



د)

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dw_F}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

هـ) با توجه به شکل قسمت (ج) و نسبت به مبدأ مشخص شده، انرژی پتانسیل گرانشی میله برابر است با U.

$$\mathrm{U} = -\mathrm{mgb}\sin\theta \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mgb\cos\theta\omega$$

و) کارکل انجام شده روی میله سبب تغییر انرژی جنبشی میله می‌شود.

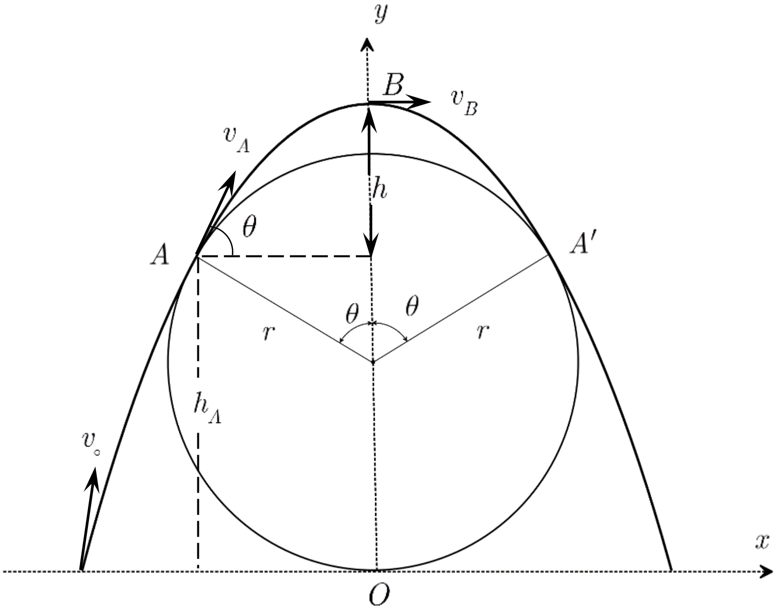
$$dT = dw_g + dw_F$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dw_g}{dt} + \frac{dw_F}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = mgb\omega\cos\theta - \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

۲- الف) AA' بود مسیر بین نقطه‌ی A و A' است، لذا $AA' = 2r\sin\theta = \dfrac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$

بنابراین

$$(1)v_A = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}$$



ب) در غیاب مقاومت هوا بین نقطه پرتاب (روی سطح زمین) و نقطهٔ A بقای انرژی مکانیکی می‌نویسیم.

$$h_A = r + r\cos\theta \qquad , \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

بنابراین

$$(2)\, v_0 = \sqrt{rg(\frac{1}{\cos\theta} + 2 + 2\cos\theta)}$$

ج) مطابق شکل ارتفاع اوج، $OB=H$ ، برابر است با

$$H = h_A + h$$

که h ارتفاع اوج پرتابه بینA و A' است، یعنی

$$h = \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{2g}$$

بنابراین

$$(3)H = r(1 + \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta})$$

د) اگر پرتابه در نقطهٔ B بر استوانه مماس شود $\theta = 0$ است و از معادلات (۲) و (۳) داریم:

$$H = 2r \quad , \quad v_0 = \sqrt{5rg}$$

هـ) پرتابه قرار است از نقطهٔ مناسبی روی سطح زمین با کمینهٔ سرعتی پرتاب شود که بتواند از روی استوانه بگذرد.

$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta(1 - 2\cos^2\theta) = 0$$

$\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ریشه‌های معادله‌اند.

$$v_0(\theta = \frac{\pi}{6}) = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg} \;\; , v_0(\theta = 0) = \sqrt{5rg} \;\; , \;\; \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

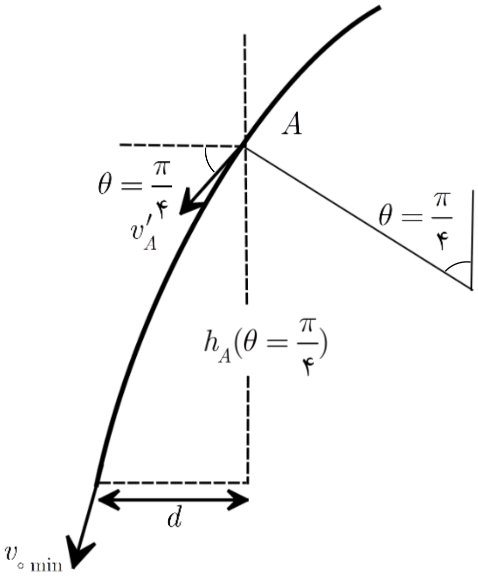
بنابراین به ازای $\theta = \dfrac{\pi}{6}, v_{0\,\min} = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg}$, $H(\theta = \dfrac{\pi}{4}) = r(1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}) > 2r$

و) با توجه به تقارن مسیر، فرض می‌کنیم پرتابه از نقطهٔ A با سرعت $v_A{}'$ و زاویه $\theta = \dfrac{\pi}{4}$پرتاب شده و با سرعت $v_{0\,\min}$ به زمین برسد،

یعنی $(5)v_{0\,\min}^2 = 2gh_A + v_A'$

و معادله مسیر نسبت به مبدأ واقع در A:

$$(۶)y=-\frac{gx^{۲}}{۲v'^{۲}_{A}\cos^{۲}\theta}+xg\theta \quad ,\theta=-\frac{\pi}{۴}$$



با قرار ادن (۴) در (۵) و اینکه $h_A=r(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ بدست می‌آوریم : $v'^{۲}_{A}=\sqrt{۲}rg$

مختصات محل برخورد پرتابه به زمین نسبت به A $(d,-h_A)$ است که در معادله (۶) قرار می‌دهیم.

$$-\frac{r}{۲}(۲+\sqrt{۲})=\frac{-gd^{۲}}{۲\sqrt{۲}rg(\frac{۱}{۲})}+d(-۱)$$

$$\sqrt{۲}d^{۲}+۲rd-r^{۲}(۲+\sqrt{۲})=\circ \Rightarrow d=r(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}})$$

پس مکان پرتاب از روی سطح زمین نسبت به مبدأ o

$$R=-d-\frac{r}{\sqrt{۲}}$$

$$R=-\frac{\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}}{۲}r$$

است.

۳- با صرفنظر از نیروی اصطکاک بین نخ و مهره، نیروی کشش در طول نخ T است. به جرم m، نیروی وزن mg و دو نیروی T از طرف نخ وارد می‌شود.

الف)

$$\hat{z}:\mathrm{T}\cos\alpha+\mathrm{T}\cos\beta-\mathrm{mg}=\circ(۱)$$

$$\hat{\mathrm{r}}:\mathrm{T}\sin\alpha+\mathrm{T}\sin\beta=\mathrm{mr}\,\omega^{۲}(۲)$$

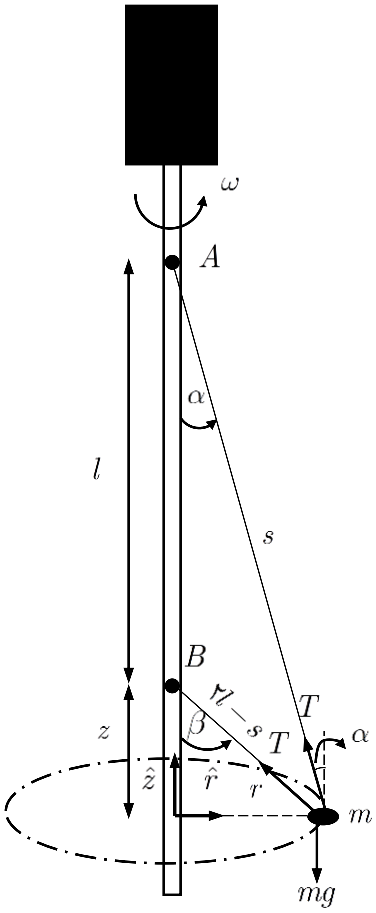
ب)

$$\sin\alpha=\frac{r}{s},\sin\beta=\frac{r}{۲\ell-s}$$

$$\cos\alpha=\frac{\ell+\xi}{s},\cos\beta=\frac{?}{۲\ell-s}(۳)$$

ج) از تقسیم معادله (۲) به معادله (۱) و استفاده از معادله (۳):

$$\frac{2\ell r}{(\ell+?)(2\ell-s)+s?}=\frac{r\omega^2}{g}\Rightarrow ?=\frac{s}{2}-\ell+\frac{g}{\omega^2}\ (4)$$



از هندسه شکل: $r^2=s^2+(\ell+?)^2=(2\ell-s)^2-?\Rightarrow ?=\frac{-s}{2}\ell+2s(5)$

از معادله (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$s=\ell+\frac{2g}{3\omega^2},\mathrm{z}=\frac{-\ell}{2}+\frac{4g}{3\omega^2}$$

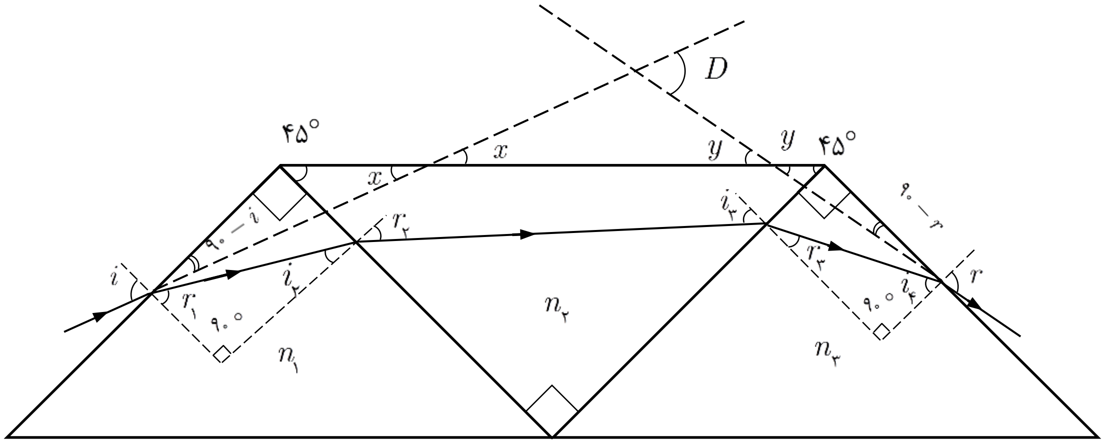
$$\cos\alpha=\frac{\frac{\ell}{2}+\frac{4g}{3\omega^2}}{\ell+\frac{2g}{3\omega^2}},\cos\beta=\frac{\frac{-\ell}{2}+\frac{4g}{3\omega^2}}{\ell-\frac{2g}{3\omega^2}}$$

$$T=\frac{mg}{\cos\alpha+\cos\beta}\Rightarrow T=\frac{1-\frac{4}{9}(\frac{g}{\ell\omega^2})^2}{2(\frac{g}{\ell\omega^2})}mg$$

د) پس از محاسبه $\sin\alpha$ از روی $\cos\alpha$: $r=s\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{4}\ell^2-\frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4}}$

$$r > ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۹}\ell^{۲} > \frac{۹}{۳}\frac{g^{۲}}{\omega^{۴}} \Rightarrow \omega^{۲} > \frac{۴}{۳}\frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\frac{۴g}{۳\ell}}$$

۴- ماخ



الف) قانون اسنل را در مرز هر دو منشور می‌نویسیم

$$\sin i = n_۱ \sin r_۱$$
$$n_۱ \sin i_۲ = n_۲ \sin r_۲$$
$$n_۲ \sin i_۳ = n_۳ \sin r_۳$$

$$n_۳ \sin i_۴ = \sin r$$

مطابق شکل $r_۱ + i_۲ = \frac{\pi}{۲}, r_۲ + i_۳ = \frac{\pi}{۲}, r_۳ + i_۴ = \frac{\pi}{۲}$ بنابراین هر معادله را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\sin i = n_۱ \cos i_۲$$
$$n_۲ \cos i_۳ = n_۱ \sin i_۲$$
$$n_۴ \sin i_۳ = n_۳ \cos i_۴$$
$$\sin r = n_۳ \sin i_۴$$
$$\Rightarrow \sin^{۲} i + n_۱^{۲} + \sin^{۲} r = n_۱^{۲} + n_۳^{۲}$$
$$r = \sin^{-۱}(\sqrt{n_۱^{۲} + n_۳^{۲} - n_۲^{۲} - \sin^{۲} i}$$

ب) D زاویه خارجی مثلث است که برابر با مجموع دو زاویه x و y یعنی $D=x+y$ اما با توجه به شکل
$$۹۰ - r + ۱۳۵ + y = ۱۸۰ \quad , \quad ۹۰ - i + ۱۳۵ + x = ۱۸۰$$

بنابراین $x = i - ۴۵^\circ$ و $y = r - ۴۵^\circ$ و لذا $D = i + r - ۹۰$

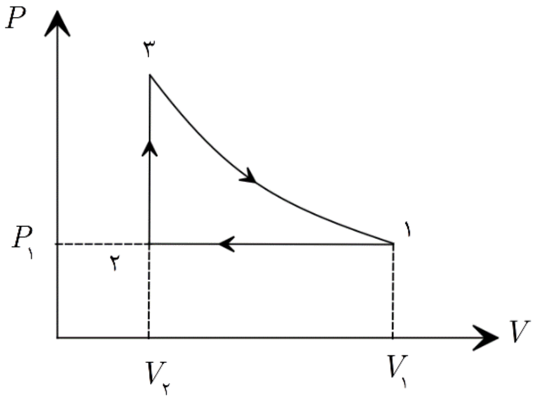
که با قرار دادن r از قسمت (الف) در معادله اخیر

$$D = i + \sin^{-۱}\sqrt{n_۱^{۲} + n_۳^{۲} - n_۲^{۲} - \sin^{۲} i} - \frac{\pi}{۲}$$

ج)

$$\frac{\pi}{۲} - i = \sin^{-۱}\sqrt{n_۱^{۲} + n_۳^{۲} n_۲^{۲} - \sin^{۲} i} \quad \Leftarrow D = ۰$$

از دو طرف sin می‌گیریم $\cos i = \sqrt{n_۱^{۲} + n_۳^{۲} - n_۲^{۲} - \sin^{۲} i}$ به توان ۲ می‌رسانیم، در نتیجه D=۰ است اگر: $n_۱^{۲} - n_۲^{۲} + n_۳^{۲} = ۱$.



۵- ابتدا با استفاده از معادله حالت گاز $P(v-nb)=nRT$ دما را در نقاط ۱ و ۲ محاسبه می‌کنیم.

$$T_1=\frac{P_1(v_1-nb)}{nR} \qquad (1)$$

$$T_2=\frac{P_1(v_2-nb)}{nR} \qquad (2)$$

فرایند ۱ ← ۳ بی در رو است که در آن $T(v-nb)^{\frac{R}{cmv}}$ ثابت است، پس
(۳)

$$T_3(v_2-nb)^{\frac{R}{cmv}}=T_1(v_1-nb)^{\frac{R}{cmv}}$$

که با قرار دادن T_1 از معادله (۱) در (۳)

$$T_3=\frac{P_1(v_1-nb)}{nR}\left(\frac{v_1-nb}{v_2-nb}\right)^{\frac{R}{cmv}} \qquad (4)$$

در فرآیند ۱ ← ۳؛ $Q_{3\to 1}=0$

در فرآیند ۲ ← ۱ برای اینکه در فشار ثابت حجم کاهش یابد، باید گرما از گاز گرفته شود.

در فرآیند ۳ ← ۲ برای اینکه در حجم ثابت فشار افزایش یابد، باید به گاز گرما داده شود.

(در یک چرخه) $w=Q_{in}-Q_{out}$ و $Q_{out}=\left|Q_{1\to 2}\right|$ و $Q_{in}=Q_{2\to 3}$

بازده $e=\frac{w}{Q_{in}}=1-\frac{Q_{out}}{Q_{in}}$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۱ و ۲ می‌نیوسیم:

$$U_2-U_1=w_{1\to 2}+Q_{1\to 2}$$

$$U_2-U_1=nC_{mv}(T_2-T_1)=\frac{C_{mv}P_1}{R}(V_2-V_1)$$

$$w_{1\to 2}=-\int_{v_1}^{v_2}P_1dv=-P_1(V_2-V_1)$$

بنابراین $Q_{1\to 2}=-P_1(V_1-V_2)(1+\frac{C_{mv}}{R})$

$$Q_{out}=-P_1(V_1-V_2)(1+\frac{C_{mv}}{R})$$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$U_3-U_2=w_{2\to 3}+Q_{2\to 3}$$

$$U_3-U_2=nC_{mv}(T_3-T_2)=nC_{mv}\left(\frac{P_1(v_1-nb)}{nR}\left(\frac{v_1-nb}{v_2-nb}\right)^{\frac{R}{cmv}}-\frac{P_1(v_2-nb)}{nR}\right)$$

$$\frac{nC_{mv}}{R}\mathrm{P}_1(\mathrm{V}_2-\mathrm{nb})\left(\left(\frac{v_1-nb}{v_2-nb}\right)^{\frac{R}{cmv}+1}-1\right)$$

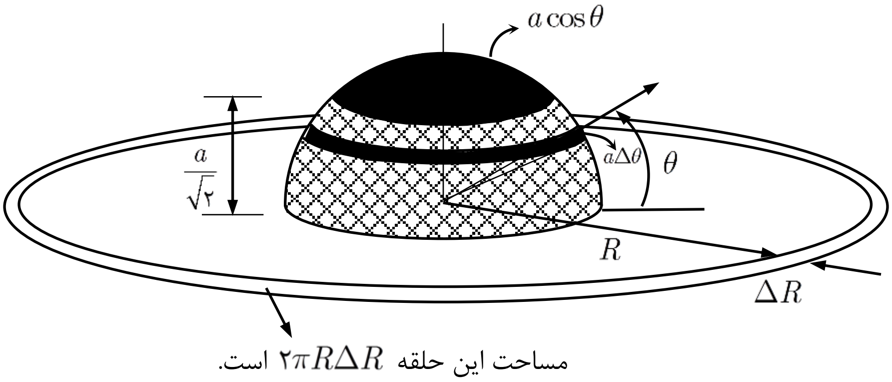
$$w_{2\to3}=0$$

$$Q_{in}=Q_{2\to3}=\frac{nC_{mv}}{R}\,\mathrm{P_1(V_2-nb)}\left(\left(\frac{v_1-nb}{v_2-nb}\right)^{\frac{R}{cmv}+1}-1\right)$$

سرانجام

$$e=1-\frac{1+\dfrac{R}{C_{mv}}}{\left(\dfrac{v_1-nb}{v_2-nb}\right)^{1+\frac{R}{cmv}}-1}\,\frac{v_1-v_2}{v_2-nb}$$

۶- الف) با فرض اینکه قطره از مرکز نیم کره با سرعت v_0 تحت زاویه‌ی θ پرتاب می‌شود.



$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

ب)

$$\Delta R=R(\theta+\Delta\theta)-R(\theta)$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta\theta}=\frac{R(\theta+\Delta\theta)-R(\theta)}{\Delta\theta}$$

برای $\Delta\theta\to 0$:

$$\Delta R=\frac{dR}{d\theta}\Delta\theta$$

$$\Delta R=\frac{2v_0^2\cos 2\theta}{g}\Delta\theta$$

ج) مقدار آبی که به نواری به مساحت $2\pi R\Delta R$ روی سطح زمین می‌رسد مربوط به نواری روی سطح نیمکره به پهنای $a\Delta\theta$ و طول $2\pi a\cos\theta$ است، یعنی مساحت $(2\pi a\cos\theta)(a\Delta\theta)$.

اگرتعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیمکره n_0 باشد و از هر کدام در واحد زمان به مقدار Q آب خارج شود، پس از نواری به مساحت θ $2\pi a^2\cos\theta$ مقدار آب خارج شده برابر است با $(2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta)(n_0Q)$.

با یک تناسب مقدار $2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta n_0 Q$ روی سطح $2\pi R\Delta R$ توزیع می‌شود و لذا سهم واحد سطح برابر است با

$$\frac{2\pi a^2 n_0 Q\cos\theta\Delta\theta}{2\pi R\Delta R}=$$ آب رسیده به واحد سطح زمین در واحد زمان

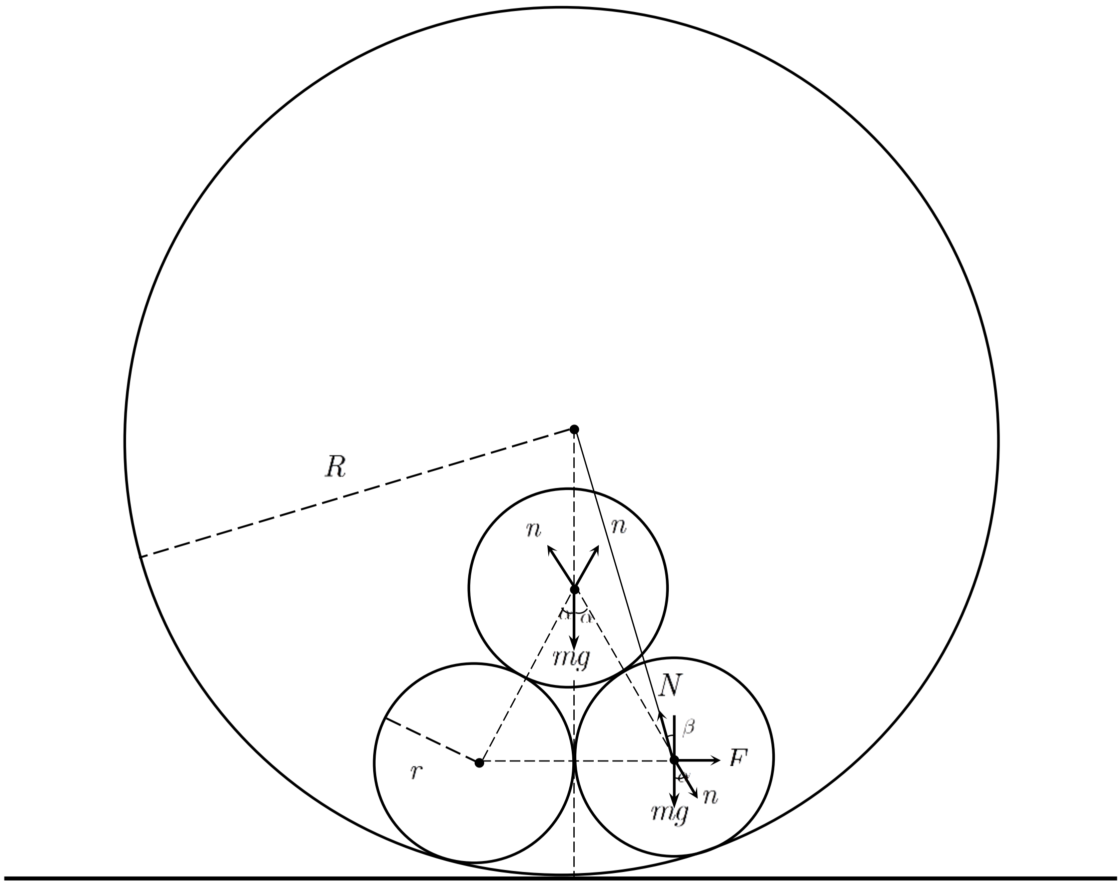
با قرار دادن R و ΔR از قسمت الف و ب $$=n_0a^2Q\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2\frac{\cos\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

اما در فاصله $R=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{v_{\circ}^{۲}}{g}$ و با توجه به $R=\frac{v_{\circ}^{۲}\sin ۲\theta}{g}$ داریم $\theta=۳۰^{\circ}$و بنابراین

$$=n_{\circ}a^{۲}Q(\frac{g}{v_{\circ}^{۲}})^{۲}$$

لازم به ذکر است که اگر عرقچین $\frac{\pi}{۴}>\theta$روی سطح کره مسدود نبود از دو زاویه‌ی θ آب‌ها به برد R می‌رسیدند.

۷- ماخ



نیروهای وارد بر استوانه بالایی n و n از سوی دو استوانه‌ی زیری و mg وزن آن است. نیروهای وارد بر استوانه‌ی زیری سمت راستی n از سوی استوانه‌ی بالایی،F از سوی استوانه سمت چپی N از سوی استوانه‌ی بزرگ و mg وزن آن است.

شرط تعادل استوانه بالایی: $۲n\cos\alpha=mg$

شرط تعادل استوانه‌ی زیری:

$$F+n\sin\alpha=N\sin\beta$$
$$N\cos\beta=mg+n\cos\alpha$$

در ضمن مطابق شکل: $\sin\alpha=\frac{r}{۲r}=\frac{۱}{۲},\sin\beta=\frac{r}{R-r}$

از سه معادله اول: $F=\frac{mg}{۲}(۳\tan\beta-\tan\alpha)$

همچنین $\tan\beta=\frac{۱}{\cot g\beta}\Rightarrow ۱+\text{cotg}^{۲}\beta=\frac{۱}{\sin^{۲}\beta}\Rightarrow\tan\beta=\frac{r}{\sqrt{R^{۲}-۲rR}}$

$$\sin\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین

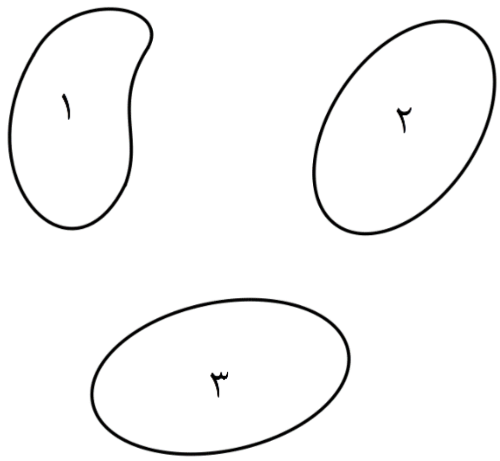
$$F = \frac{mg}{۲}\left(\frac{۳r}{\sqrt{R^{۲} - ۲rR}} - \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

به شرطی لوله‌های زیری در تماس باهم می‌مانند که $F > ۰$ باشد یعنی :

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{۲} - ۲\left(\frac{R}{r}\right) - ۲۷ < ۰$$

پس باید $\left(\frac{R}{r}\right)_{\max} = ۱ + ۲\sqrt{۷}, \frac{R}{r} < ۱ + ۲\sqrt{۷}$

۸- ماخ



$$Q_۱ = ۲۵\mu C \quad , \quad Q_۲ = ۱۰\mu C \quad , \quad Q_۳ = ۱۵\mu C$$
$$V_۱ = ۱۰v \quad , \quad V_۲ = ۰ \quad , \quad V_۳ = ۰$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_۱ = ۲.۵\mu C / v \quad , \alpha_۲ = ۱\mu C / v \quad , \alpha_۳ = ۱.۵\mu C / v$$
$$Q_۱ = ۳۵\mu C \quad , \quad Q_۲ = ۶۰\mu C \quad , \quad Q_۳ = ۲۵\mu C$$
$$V_۱ = ۱۰v \quad , \quad V_۲ = ۱۰v \quad , \quad V_۳ = ۰$$
$$\Downarrow$$
$$\beta_۱ = ۱\mu C / v \quad , \beta_۲ = ۵\mu C / v \quad , \beta_۳ = ۱\mu C / v$$
$$Q_۱ = ۵۰\mu C \quad , \quad Q_۲ = ۷۰\mu C \quad , \quad Q_۳ = ۵۰\mu C$$
$$V_۱ = ۱۰v \quad , \quad V_۲ = ۱۰v \quad , \quad V_۳ = ۱۰v$$
$$\Downarrow$$
$$\gamma_۱ = ۱.۵\mu C / v \quad , \gamma_۲ = ۱\mu C / v \quad , \gamma_۳ = ۲.۵\mu C / v$$

به ازای $Q_۳ = ۰$ و بنا به

تعریف خازن :

$$-Q = ۲.۵v_۱ + v_۲ + ۱.۵v_۳$$
$$Q = v_۱ + ۵v_۲ + v_۳ \qquad \Leftarrow Q_۲ = -Q_۱ = Q$$
$$۰ = ۱.۵v_۱ + v_۲ + ۲.۵v_۳$$

با قرار دادن $v_۳$ از معادله سوم در دو معادله اول:

$$\begin{cases} -Q = \frac{۸}{۵}v_۱ + \frac{۲}{۵}v_۲ \\ Q = \frac{۲}{۵}v_۱ + \frac{۲۳}{۵}v_۲ \end{cases} \Rightarrow v_۱ = -\frac{۲۵}{۳۶}Q \qquad v_۲ = \frac{۵}{۱۸}Q$$

که Q بر حسب μC و $v_۱, v_۲$ برحسب ولت‌اند.

$$\Delta v = v_۲ - v_۱ \quad , \quad \Delta v = \frac{Q}{C}$$
$$\Downarrow$$
$$C = \frac{۳۶}{۳۵}\mu F = ۱.۰۳\mu F$$